Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Zavod za matematiku

Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

˝Dvodimenzionalna valna jednadžba˝

Profesor: Dr.sc. Ivica Gusić
Andrea Gelemanović i Martina Hrkovac

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Parcijalne diferencijalne jednadžbe daju vezu između (zavisne) funkcije dvije ili više promjenljivih i parcijalnih? varijabli u odnosu na njene nezavisne promjenljive varijable. U većini inženjerskih problema nezavisne promjenljive varijable su ili prostorne (*x; y; z*) ili prostorne i vremenske (*x; y; z; t*), a zavisna promjenljiva varijabla ovisi o procesu koji se modelira. Rješenje neke parcijalne diferencijalne jednadžbe je ona funkcija koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u čitavoj domeni promatranja, pri čemu moraju biti ispunjeni početni i/ili granični uvjeti. U vrlo malom broju slučajeva rješenje parcijalnih jednadžbi se može prikazati u zatvorenom obliku, pa se gotovo uvijek rješenje mora tražiti koristeći numeričke metode.

1. OSNOVNI POJMOVI

Kao i u slučaju običnih diferencijalnih jednadžbi kažemo da je parcijalna diferencijalna jednadžba linearna ako je prvog reda i u zavisnoj varijabli i u njezinim parcijalnim derivacijma. Ako svaki član takve jednadžbe sadrži ili zavisnu varijablu ili jednu od njenih derivacija, za jednadžbu se kaže da je homogena. U suprotnom je nehomogena.

Primjer 1. Neke važne linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{ jednodimenzionalna valna jednadžba} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{ jednodimenzionalna jednadžba topline} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \text{ dvodimenzionalna Laplaceova jednadžba} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \rightarrow \text{ dvodimenzionalna Poissonova jednadžba} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \text{ trodimenzionalna Laplaceova jednadžba} \qquad (5)$$

pri čemu je $\boldsymbol{c}$ konstanta, $\boldsymbol{t}$ vrijeme, a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ koordinate u prostoru. Jednadžba (4) je nehomogena (ako je $f \neq 0$), dok su ostale homogene.

Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekom području ***R*** prostora nezavisnih varijabli je funkcija, koja skupa sa svojim parcijalnim derivacijama, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na cijelom području ***R.***
Općenito, rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe je vrlo složeno. Na primjer, funkcije (6), koje su u potpunosti različite jedna od druge, su rješenja jednadžbe :

$$u = x^2 - y^2\,, \quad u = e^x \cos y\,, \quad u = \ln\left(x^2 + y^2\right) \tag{6}$$

Jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje odgovara danom fizičkom problemu, postignuto je korištenjem dodatnih podataka nastalih u fizičkoj situaciji Na primjer, u nekim slučajevima rješenje problema je određeno vrijednostima na granici domene ("granični uvjeti"), dok je u drugim slučajevima, kad je vrijeme ***t*** jedna od nezavisnih vrijabli, ono odredeno vrijednostima u $t = 0$ ("početni uvjeti").
Znamo da, ako je obična diferencijalna jednadžba linearna i homogena, tada iz poznatog rješenja, daljnje rješenje može biti postignuto superpozicijom. Isto vrijedi za homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Osnovni teorem 1.
Ako su u_1 i u_2 rješenja linearne homogene parcijalne jednadžbe u nekom području, tada je

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \tag{7}$$

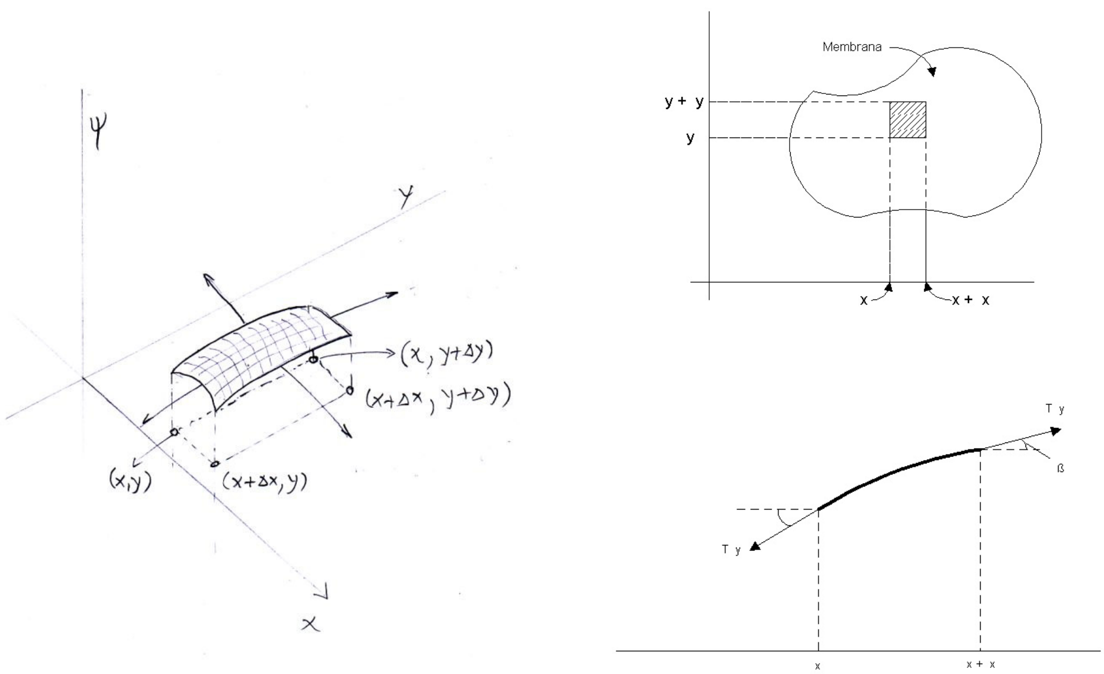
gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante, također rješenje te jednadžbe u tom području.

2. VIBRIRAJUĆE (TITRAJUĆE) MEMBRANE
(Dvodimenzionalne valne jednadžbe)

Kao jedan od važnih problema u području vibracija, promatramo titranje rastegnutih membrana. Na početku postavljamo važne pretpostavke:

1. *Masa membrane po jedinici površine je konstantna („homogena membrana“). Membrana je savršeno fleksibilna i tako tanka da ne pruža nikakav otpor savijanju.*
2. *Membrana je napeta i fiksirana duž cijele njene granice u ravnini xy. Napetost T membrane po jedinici duljine, uzrokovana rastezanjem membrane, jednaka je u svim točkama i u svim smjerovima te se ne mijenja tijekom vibriranja.*
3. *Otklon, u(x,y,z), membrane tijekom vibriranja je malen u usporedbi s veličinom membrane, a svi kutovi nagiba su maleni.*

Iako ove pretpostavke ne mogu biti realizirane u praksi, male transverzalne vibracije tanke fizičke membrane će zadovoljiti ove pretpostavke sa zadovoljavajućom točnošću. Da bismo izveli diferencijalnu jednadžbu koja opisuje gibanje membrane, razmatramo sile koje djeluju na malim dijelovima membrane (slika 1.).



Slika 1. Vibrirajuće membrane

Kako su otklon membrane i nagibi kutova mali, stranice isječka membrane su jednake Δx i Δy. Napetost T je sila po jedinici duljine, stoga su sile koje djeluju na rubovima isječka približno jednake $T\Delta x$ i $T\Delta y$. Budući da je membrana savršeno fleksibilna, ove sile su tangente na membranu.
Prvo razmatramo horizontalne komponente sila. Ove komponente su dobivene množenjem sila s kosinusom kuta otklona. Kako su ti kutovi mali, njihovi kosinusi su približno jednaki 1 pa su horizontalne komponente sila na suprotnim stranama približno jednake. Tako će gibanje dijelova membrane u horizontalnom smjeru biti zanemarivo maleno. Iz ovoga zaključujemo da se membrana giba transverzalno, tj. svaki djelić membrane se giba vertikalno.

Vertikalne komponente sila preko krajeva paralelnih s yu-ravninom su (slika 1.):

$$T\Delta y \sin\beta \quad \text{i} \quad -T\Delta y \sin\alpha \tag{8}$$

pri čemu negativan predznak označava silu koja je na lijevom rubu okrenuta prema dolje. Kako su kutovi mali, njihove sinuse možemo zamijeniti tangensima pa je tako rezultanta tih dviju vertikalnih komponenti:

$$T\Delta y\left(\sin\beta-\sin\alpha\right)\approx T\Delta y\left(\tan\beta-\tan\alpha\right)=T\Delta y\left[u_x\left(x+\Delta x,y_1\right)-u_x\left(x,y_2\right)\right] \tag{9}$$

gdje indeks x označava parcijalnu derivaciju, a y_1 i y_2 su vrijednosti izmedu y i $\left(y+\Delta y\right)$. Slično, rezultante druge dvije nasuprotne strane isječka su:

$$T\Delta x\left[u_y\left(x_1,y+\Delta y\right)-u_y\left(x_2,y\right)\right] \tag{10}$$

gdje su x_1 i x_2 vrijednosti između x i $x+\Delta x$.
Prema Newtonovu 2. zakonu, zbroj sila (9) i (10) jednak je masi, $\rho\Delta A$, isječka pomnoženog s akceleracijom $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, gdje je ρ masa nesavinute membrane po jedinici površine, a $\Delta A=\Delta x\cdot\Delta y$ je površina isječka kada je nesavinuta. Tako je:

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\Delta y\left[u_x\left(x+\Delta x,y_1\right)-u_x\left(x,y_2\right)\right]+T\Delta x\left[u_y\left(x_1,y+\Delta y\right)-u_y\left(x_2,y\right)\right] \tag{11}$$

gdje je izraz na lijevoj strani procijenjen na nekim pogodnim točkama $\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$ koje odgovaraju isječku. Podijelimo li jednadžbu (11) s $\rho\Delta x\Delta y$, dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x\left(x+\Delta x,y_1\right)-u_x\left(x,y_2\right)}{\Delta x}+\frac{u_y\left(x_1,y+\Delta y\right)-u_y\left(x_2,y\right)}{\Delta y}\right] \tag{12}$$

Ako su Δx i Δy približno jednaki nuli, tada postižemo:

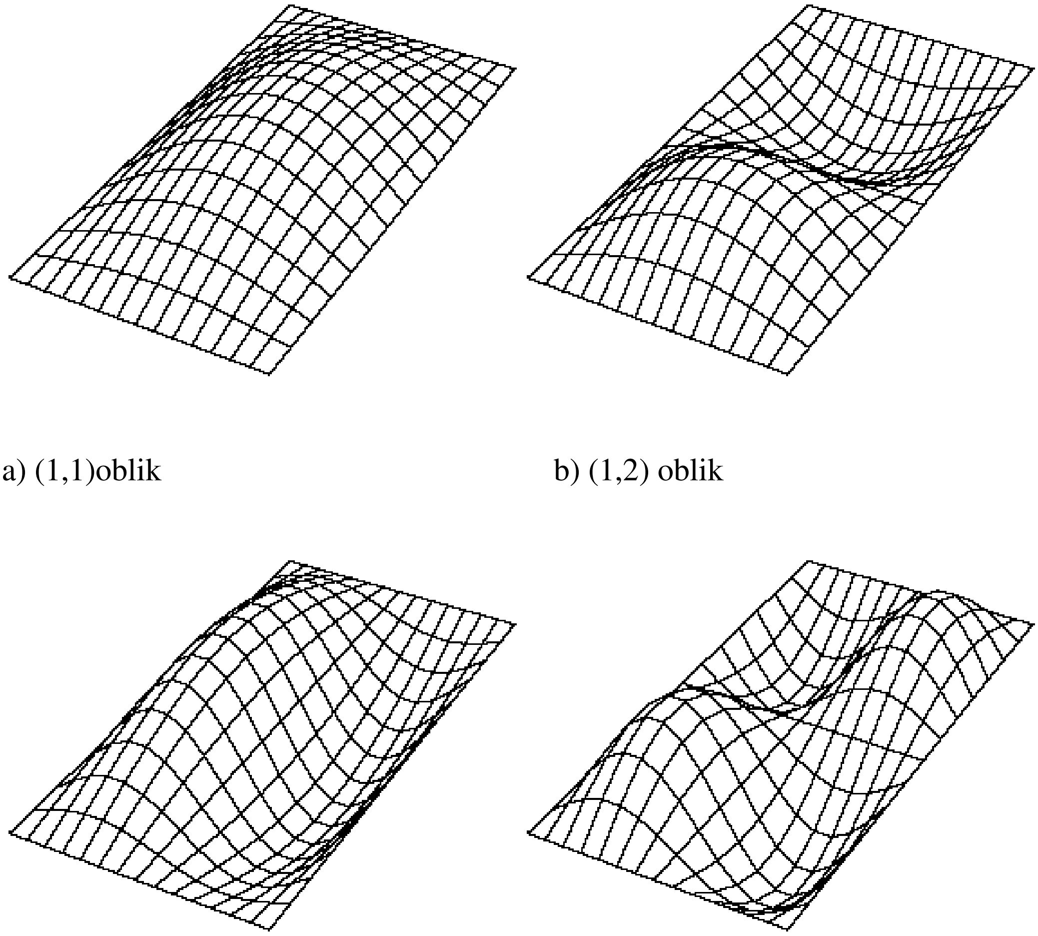
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{13}$$

Jednadžba (13) naziva se ***dvodimenzionalna valna jednadžba***. Može se izraziti i pomoću Laplacea i tako pisati u obliku:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \tag{14}$$

3. PRAVOKUTNE MEMBRANE

Slika 2. Vibrirajući oblici pravokutnih membrana



a) (1,1)oblik b) (1,2) oblik

c) (2,1) oblik d) (2,2) oblik

Kako bismo riješili problem vibrirajuće membrane, moramo odrediti rješenje u(x,y,t) za dvo-dimenzionalnu valnu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

koja zadovoljava rubne uvjete:

$u = 0$ $\quad\rightarrow$ na rubu membrane za sve $t \geq 0$ (2)

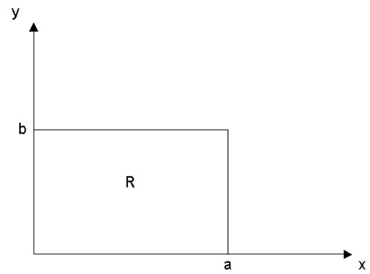
te početne uvjete:

$u(x, y, 0) = f(x, y)$ i (3)

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x, y)$ (4)

(2) znači da je membrana učvršćena na rubovima
(3) opisuje položaj točaka membrane za t=0
(4) opisuje brzinu kojoj se točke membrane gibaju pri t=0 (bar jedna od tih dviju funkcija f,g treba biti različita od nule, inače neće biti titranja).

Razmotrit ćemo pravokutnu membranu R (slika 3.):



Slika 3. Pravokutna membrana

<u>Prvi korak:</u>

Primjenom metode razdvajanja (separacije) varijabli, prvo određujemo rješenje jednadžbe (1) koje zadovoljava uvjet (2). U tu svrhu polazimo od:

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \tag{5}$$

Supstitucijom jednadžbe (5) u valnu jednadžbu (1) dobivamo:

$$F\ddot{G}=c^2\left(F_{xx}G+F_{yy}G\right)$$

gdje indeksi označavaju pacijalne derivacije , a točkice derivacije s obzirom na *t*.
Dijeleći obje strane s c^2FG nailazimo na:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}\left(F_{xx}+F_{yy}\right)$$

Zato što funkcija na lijevoj strani ovisi jedino o *t*, dok funkcije na desno ne ovise o *t*, izrazi na obje strane moraju biti jednaki konstanti. Može se pokazati da se svodi na obične diferencijalne jednadžbe i samo se uz negativnu konstantu dobije titranje – vidi jednadžbu (6). Pokazuje da će samo negativne vrijednosti konstante voditi do rješenja koje zadovoljava uvjet (2), a da pri tom nije jednako nuli. Označivši negativnu konstantu s $-v^2$, dobivamo:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}\left(F_{xx}+F_{yy}\right)=-v^2$$

Ovo povlači dvije diferencijalne jednadžbe:

$\ddot{G}+\lambda^2G=0$, gdje je $\lambda=cv$ i (6)

$$F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0 \tag{7}$$

Razmatramo jednadžbu (7) i upotrebljavamo metodu razdvajanja (separacije) varijabli, još jednom (ovaj put varijabla x i y), tj. određujemo rješenja jednadžbe (7) koja zadovoljavaju rubni uvjet (2)

$$F(x, y) = H(x)Q(y) \tag{8}$$

Supstitucijom jednadžbe (8) u (7) proizlazi:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} Q = -\left(H \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + v^2 HQ \right)$$

Dijeleći obje strane s HQ dolazimo do:

$$\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + v^2 Q \right)$$

Funkcije na lijevoj strani ovise jedino o x dok funkcija na desno ovisi jedino o y pa izrazi na obje strane moraju biti jednaki konstanti. Ta konstanta mora biti negativna, $-k^2$, jer će jedino negativne vrijednosti voditi rješenju koje zadovoljava jed. (16) a da nije jednako nuli.

$$\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + v^2 Q \right) = -k^2$$

Ovo rezultira običnom diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k^2 H = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + p^2 Q = 0, \text{ gdje je } \quad p^2 = v^2 - k^2 \tag{10}$$

<u>Drugi korak:</u>

Opća rješenja jednadžbi (9) i (10) su:

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{i} \quad Q(y) = C \cos py + D \sin py$$

gdje su A,B,C i D konstante. Iz jednadžbi (5) i (2) proizlazi da $F = HQ$ mora iznositi nula na granici membrane, što odgovara $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ (slika 3.). Dakle, uvjeti su sljedeći:

$$H(0) = 0 \quad H(a) = 0 \quad Q(0) = 0 \quad Q(b) = 0$$

Stoga, $H(0) = A = 0 \;\; \rightarrow \; H(a) = B\sin ka = 0$

Moramo uzeti da je $B \neq 0$, u suprotnom $H \equiv 0$ i $F \equiv 0$ (protumačiti te oznake ili drukčije napisati). Dakle, $\sin ka = 0$, pa je $ka = m\pi$, tj. $k = \frac{m\pi}{a}$ (m cijeli broj).

Slično zaključujemo da je C=0, a p mora biti ograničen na vrijednosti $p = \frac{n\pi}{b}$ gdje je n cijeli broj. Tako dolazimo do rješenja:

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{i} \quad Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, ..., \\ n = 1, 2, ... \end{matrix}$$

Slijedi da su sljedeće funkcije rješenja jednadžbe (7) koje zadovoljavaju rubni uvjet (2):

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, ..., \\ n = 1, 2, ... \end{matrix} \tag{11}$$

Kako je $p^2 = v^2 - k^2$ iz (10) i $\lambda = cv$ iz (6) imamo: $\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$

Isto tako, $k = \frac{m\pi}{a}$ i $p = \frac{n\pi}{b}$ odgovara vrijednost :

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \tag{12}$$

u jednadžbi (6), i odgovarajuće opće rješenje jednadžbe (6) je:

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

Slijedi da su funkcije $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$ na duljini u_{mn}:

$$u_{mn}(x, y, t) = \left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

s λ_{mn} , u skladu s jednadžbom (12), rješenja valne jednadžbe (1), koja zadovoljava rubne uvjete. Ove funkcije nazivaju se ***karakteristične funkcije***, a iznosi λ_{mn} se zovu ***karakteristične vrijednosti*** vibrirajuće membrane. Frekvencija u_{mn} je $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$.

Zanimljivo je napomenuti da, ovisno o a i b, nekoliko funkcija može odgovarati istoj karakterističnoj vrijednosti. Fizički to znači da mogu postojati vibracije s jednakim frekvencijama, ali različitim krivuljama u području točaka koje su fiksne.

Treći korak.

Da bismo postigli rješenje koje, također, zadovoljava početne uvjete (3) i (4), razmatramo dvostruke redove:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{14}$$

Konačno rješenje pokušavamo dobiti zbrajanjem beskonačno mnogo karakterističnih rješenja U nastavku će se sve svoditi na određivanje konstanti Bmn i B*mn.

Iz gornje jednadžbe i iz jed. (3) dobivamo:

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y) \tag{15}$$

Ove redovi se nazivaju ***dvostruki Fourierovi redovi***.
Ako pretpostavimo da se f(x,y) može razviti u takav red, tada Fourierove koeficijente, B_{mn} za $f(x,y)$, u jed. (15), možemo odrediti na sljedeći način:

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{16}$$

Također, jed. (15) možemo pisati kao:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Za fiksni y, ovo su Fourierovi sinusni redovi za f(x,y), razmatrane kao funkcije od x, pa slijedi da su koeficijenti ovog razvoja:

$K_m(y)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$ red za $K_m(y)$ pa su koeficijenti:

$$B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy \tag{18}$$

Iz jednadžbe (17) i (18) dolazimo do ***opće Eulerove formule*** za Fourierove koeficijente za $f(x,y)$ u dvostrukim Fourierovim redovima 15).

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad \begin{matrix} m=1,2,...,\\ n=1,2,.... \end{matrix} \tag{19}$$

Koeficijenti B_{mn} u jednadžbi (14) su sada određeni za Fourierove koeficijente .Da bismo odredili B_{mn}^{*} deriviramo izraz (14) po *t,* i koristeći (4) dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}^{*}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)$$

Pretpostavljamo da funkcija $g(x, y)$ može biti razvijena u dvostruke Fourierove redove, tada dobivamo:

$$B_{mn}^{*}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_{0}^{b}\int_{0}^{a}g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad \begin{matrix} m=1,2,..., \\ n=1,2,.... \end{matrix} \tag{20}$$

Rezultat je taj, da bi jednadžba (14) zadovoljila početne uvjete, koeficijenti B_{mn} i B_{mn}^{*} moraju biti izabrani prema izrazima (19) i (20).

4. ZAKLJUČAK

Kako smo već spomenule, jedan od važnih problema u području vibracija je promatranje titranja rastegnutih membrana.
Kako bismo taj problem riješili potrebno je odrediti riješenje u (x, y, t) za dvodimenzionalnu valnu jednadžbu koja glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Rješenje neke parcijalne diferencijalne jednadžbe je ona funkcija koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u čitavoj domeni promatranja, pri čemu moraju biti ispunjeni početni i/ili rubni uvjeti.

1) Rubni uvjet:
$u = 0$ → znači da je membrana učvršćena na rubovima

2) Početni uvjeti:

$u(x, y, 0) = f(x, y)$ →opisuje položaj točaka membrane za t=0

$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}= g(x, y)$ → opisuje brzinu kojoj se točke membrane gibaju pri t=0 (bar jedna od tih dviju funkcija f,g treba biti različita od nule, inače neće biti titranja).

D bismo postigli rješenje koje zadovoljava početne uvjete, razmatramo dvostruke redove.

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1}$$

Konačno rješenje pokušavamo dobiti zbrajanjem beskonačno mnogo karakterističnih rješenja

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, ..., \\ n = 1, 2, ... \end{matrix} \qquad (2)$$

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, ..., \\ n = 1, 2, ... \end{matrix} \qquad (3)$$

Rezultat je taj, da bi jednadžba (1) zadovoljila početne uvjete, koeficijenti B_{mn} i B_{mn}^* moraju biti izabrani prema izrazima (2) i (3).

5. LITERATURA

1. A.E. Kreyszig, ˝Advanced Engineering Mathematics˝, John Wiley & Sons Inc., 1995.